19 DIGITALNA ALGEBRA

Na ovim stranicama Digitalne Algebre, obraditi ce se osnove na kojima se bazira rad racunara, ali samo sa aspekta matematike. Biti ce rijeci o principu rada logickih sklopova detaljima kobinacije razlicitih sklopova u cjeline, popracenmo primjerima, kroz koje se to gradivo moze savladati. Za savladati sve ostale osobine digitalne algebre, potrebno je potraziti odgovarajucu literaturu na drugom mjestu.

19.1 Sistemi brojeva koristenih u digitalnoj algebri

Stranice nece obraditi rjesavanje zadataka, obzirom da svaki dzepni kalkulator ima ugradjenu mogucnost pretvaranja brojeva iz jednog u drugi sistem. U nastavku je prikazan samo postupak pretvaranja

Dekadski sistem brojeva: Brojevi sa bazom 10

To je opce poznati sistem koji se sastoji od znamenaka 0,1,2,3,4,5,6,7,8 i 9.

Brojevi se formiraju na slijedeci nacin: $5738 \Rightarrow$

$$\begin{array}{llcccc}
8\times10^0 & = & & & & 8 \\
3\times10^1 & = & & & 3 & 0 \\
7\times10^2 & = & & 7 & 0 & 0 \\
5\times10^3 & = & 5 & 0 & 0 & 0 \\
- & & - & - & - & - \\
 & & 5 & 7 & 3 & 8
\end{array}$$

Binarni system brojeva: Brojevi sa bazom 2

To je sistem brojeva koji imaju samo dvije znamenke, 0 i 1.

Te znamenke oznacavaju naponski nivo u logickom sklopu racunala.

Nula $(0 = 0V)$ je beznaponko stanje a Jedan je stanje sa prisutnim naponom of +5V.

LSB-least significant bit-zauzima mjeso sa najnizom potencijom od 2.

MSB-most significant bit-zauzima mjeso sa najvisom potencijom od 2.

Promotrimo postupak pretvaranja broja 5738 u binarni sistem brojeva i provjeru racuna:

$$\left.\begin{cases} 5738 \div 2 = & 2869 & \text{ostatak } 0 \text{ LSB} \\ 2869 \div 2 = & 1434 & \text{ostatak } 1 \\ 1434 \div 2 = & 717 & \text{ostatak } 0 \\ 717 \div 2 = & 358 & \text{ostatak } 1 \\ 358 \div 2 = & 179 & \text{ostatak } 0 \\ 179 \div 2 = & 89 & \text{ostatak } 1 \\ 89 \div 2 = & 44 & \text{ostatak } 1 \\ 44 \div 2 = & 22 & \text{ostatak } 0 \\ 22 \div 2 = & 11 & \text{ostatak } 0 \\ 11 \div 2 = & 5 & \text{ostatak } 1 \\ 5 \div 2 = & 2 & \text{ostatak } 1 \\ 2 \div 2 = & 1 & \text{ostatak } 0 \\ \underline{1 \div 2 =} & \underline{0} & \underline{\text{ostatak } 1 \quad \text{MSB}} \\ & & 1011001101010 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} 1011001101010 & 0 \times 2^0 = & & & & 0 \\ & 1 \times 2^1 = & & & & 2 \\ & 0 \times 2^2 = & & & & 0 \\ & 1 \times 2^3 = & & & & 8 \\ & 0 \times 2^4 = & & & & 0 \\ & 1 \times 2^5 = & & & 3 & 2 \\ & 1 \times 2^6 = & & & 6 & 4 \\ & 0 \times 2^7 = & & & & 0 \\ & 0 \times 2^8 = & & & & 0 \\ & 1 \times 2^9 = & & 5 & 1 & 2 \\ & 1 \times 2^{10} = & 1 & 0 & 2 & 4 \\ & 0 \times 2^{11} = & & & & 0 \\ & 1 \times 2^{12} = & \underline{4} & \underline{0} & \underline{9} & \underline{6} \\ & & 5 & 7 & 3 & 8 \end{array}\right\}$$

Oktalni sistembrojeva: Brojevi sa bazom 8

To je sistem brojeva koji imaju sesnaest znamenki: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E i F. Taj sistem brojeva koristi da bi se pojednostavio rad upisa i citanja instrukcija u racunalima a radi povecanja brzine racunala.

Brojevi se formiraju na slijedeci nacin:

a)Pretvaranje binarnog broja u hexadecimalni:

Svrstamo znamenke u grupu od cetiri, pocevsi s desna i nadjemo odgovarajuci hexadecimalni broj. $01101101_2 \Rightarrow \underbrace{0\ 1\ 1\ 0}_{\text{hexadecimalni}\ \ 6}\ \underbrace{1\ 1\ 0\ 1}_{\text{hexadecimalni}\ \ D}$

Binarni broj 01101101_2 = Hexadecimalni broj $6D_{16}$

b)Pretvaranje hexadecimalnog u decimalni: $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$

$2A6_{16} = 6 \times 16^0 + A \times 16^1 + 2 \times 16^2 = 6 \times 1 + 10 \times 16 + 2 \times 256 = 678$

Hexadecimalni broj $2A6_{16}$ = Decimalni broj 678_{10}

c)Pretvaranje dekadskog broja u hexadecimalni:

Slicno pretvaranju binarnih brojeva, djelimo sa 16:

$$\left.\begin{array}{ll} 151_{10} = 151 \div 16 = 9 & \text{ostatak je } 7 \\ \qquad\quad 9 \div 16 = 0 & \text{ostatak je } 9 \end{array}\right\} 97_{16} \Rightarrow \text{Dekadski broj } 151_{10} = \text{Hexadecimalniroj } 97_{16}$$

Provjera: $97_{16} = 7\times16^0 + 9\times16^1 = 7+144 = 151$

Heksadecimalni sistembrojeva: Brojevi sa bazom 16

To je sistem brojeva koji imaju sesnaest znamenki: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E i F.
Taj sistem brojeva koristi da bi se pojednostavio rad upisa i citanja instrukcija u racunalima a radi povecanja brzine racunala.
Brojevi se formiraju na slijedeci nacin:

a)Pretvaranje binarnog broja u hexadecimalni:

Svrstamo znamenke u grupu od cetiri, pocevsi s desna i nadjemo odgovarajuci hexadecimalni broj. $01101101_2 \Rightarrow \underbrace{0\ 1\ 1\ 0}_{\text{hexadecimalni } 6}\ \underbrace{1\ 1\ 0\ 1}_{\text{hexadecimalni } D}$

Binarni broj 01101101_2 = Hexadecimalni broj $6D_{16}$

b)Pretvaranje hexadecimalnog u decimalni: $A=10$, $B=11$, $C=12$, $D=13$, $E=14$, $F=15$

$2A6_{16} = 6\times16^0 + A\times16^1 + 2\times16^2 = 6\times1 + 10\times16 + 2\times256 = 678$

Hexadecimalni broj $2A6_{16}$ = Decimalni broj 678_{10}

c)Pretvaranje dekadskog broja u hexadecimalni:

Slicno pretvaranju binarnih brojeva, djelimo sa 16:

$$\left.\begin{array}{ll} 151_{10} = 151\div16 = 9 & \text{ostatak je } 7 \\ \quad 9\div16 = 0 & \text{ostatak je } 9 \end{array}\right\} 97_{16} \Rightarrow \text{Dekadski broj } 151_{10} = \text{Hexadecimalniroj } 97_{16}$$

Provjera: $97_{16} = 7\times16^0 + 9\times16^1 = 7+144 = 151$

ASCII Code:

Ovaj skup kodova, koristimo svakodnevno kada radimo sa racunarom. To je tablica alfanumerickih znakova.
Pomocu tih znakova komuniciramo sa racunarom. Tabelu sa ASCII kodom moguce je naci u mnogim knjigama koje obradjuju temu racunara. Svaki od brojeva, slova i znakova ima svoj definirani kod, koji se sastoji od 7 bit. U praksi se obicno koristi 8 bit. Taj jedan dodatni, obicno se koristi za definiranje par-nepar bita, odnosno za kontrolu prijenosa informacija (kako se to radi, spada vec u podrucje racunara).

Primer ASCII coda: Slovo P ima kod 1010000
Slovo p ima kod 1110000
Broj 9 ima kod 0111001

19.2 Osnovni logicki sklopovi

Ovdje ce biti prikazane osnovne karakteristike naj jednostavnijih logickih sklopova u smislu funkcionalnog odnosa ulaznih i izlaznih signala. Radi boljeg razumijevanja, slijedece su oznake i pojmovi koje ce sekoristiti

$A \quad B \quad f0 \quad f2 \quad f3 \quad f4 \quad f5 \quad f6 \quad f7 \quad f8$

Ulazni signal: ,….

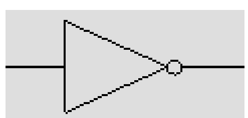
$f9 \quad f10 \quad f11 \quad f12 \quad f13 \quad f14 \quad f15 \quad 0 \quad 1$

Izlazni signal: $y = f\left(A, B, C, ...\right)$

Istinito (Truth): signal ima napon +5V, oznaku 1 ili je visok (HIGH)
Neistinito (False): signal nema napona, oznaka 0 ili je nizak (LOW)
Tablica istine (Truth table): tablica koja prikazuje odnos ulaznih i izlaznih signala za svaki signal i izlaznu funkciju posebno

Logicki sklop jedne promjenjive: Inverter

To je logicki sklop koji za izlaznu funkciju ima komplement ulazne funkcije. Za ulaznu funkciju 1, izlazna je 0 i suprotno. Inverter se graficki oznacava sa kruzicem bilo na ulazu ili izlazu logickog skolpa.



$$y = f\left(A\right) = \overline{A}$$

A	$y = \overline{A}$
0	1
1	0

Logicki sklopovi i tablica istine za sklop sa dvije promjenjive

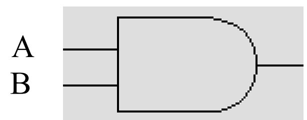
U narednoj Tabeli , prikazane su sve kombinacije (ukupno 16) za osnovne logicke sklopove koji imaju dvije ulazne funkcije A i B i izlaznu funkciju $y = f\left(A, B\right)$

Svaka funkcija predstavlja jedan od osnovnih sklopova. na pr. funkcija f1 predstavlja AND logicki sklop (kolone A,B i $f1$ cine tablicu istine za AND skolp). Na narednim stranicama biti ce vise rijeci u o svakom od tih osnovnih ligickih sklopova.

A	B	$f0$	$f1$	$f2$	$f3$	$f4$	$f5$	$f6$	$f7$	$f8$	$f9$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f10$	$f11$	$f12$	$f13$	$f14$	$f15$
1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1

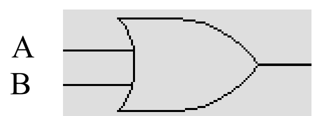
Logicki sklop AND
To je logicki sklop koji ima svojstvo da je izlazna funkcija (u nastavku: izlaz) visoka (u nastavku: 1) samo ako su oba ulaza 1.(vidi gornju tabeli: funkcija $f1$)



$$y = f\left(A, B\right) = A \cdot B$$

A	B	$y = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

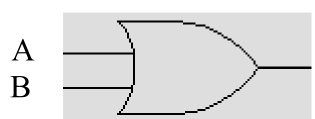
Logicki sklop OR
To je logicki sklop koji ima svojstvo da je izlaz 1, kada je bilo koji od ulaza 1 (Tabela 1: funkcija f7)



$$y = f\left(A, B\right) = A + B$$

A	B	$y = A \cdot B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

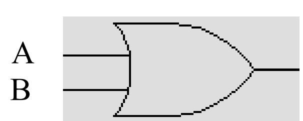
Logicki sklop NAND
To je logicki sklop koji ima svojstvo da je izlaz 1, kada je bilo koji od ulaza 0 i izlaz 0, kada su oba ulaza 1 (Tabela 1: funkcija)



$$y = f\left(A, B\right) = \overline{A \cdot B}$$

A	B	$y = \overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

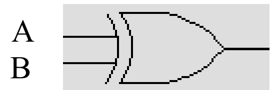
Logicki sklop NOR
To je logicki sklop koji ima svojstvo da je izlaz 1, samo kada su oba ulaza 0 i ima izlaz 0 kada su ulazi 1 ili 0 (Tabela 1: funkcija)



$$y = f\left(A, B\right) = \overline{A + B}$$

A	B	$y = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Logicki sklop ExOR
To je logicki sklop koji ima svojstvo da je izlaz 1, samo kada je bilo koji od ulaza 1 i izlaz 0, kada su oba ulaza 1 ili 0 (Tabela 1: funkcija)



$$y = f(A,B) = A \oplus B$$
$$y = \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}$$

A	B	$y = \overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

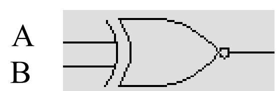
Logicki sklop ExNOR
To je logicki sklop koji ima svojstvo da je izlaz 0, kada je bilo koji od ulaza 1 ili 0, a izlaz 0, kada su oba izlaza 0 ili 1(Tabela 1: funkcija $f9$)

3. Pojednostavi izraz: $y = AB + \overline{B}\,\overline{A}C$

$y = AB + \overline{B}\,\overline{A}C \Rightarrow y = AB + \overline{B}\,\overline{A}C$ zamijenimo: $D = AB, \overline{D} = \overline{A}\,\overline{B}$

$y = D + \overline{D}C \Rightarrow$ primijenimo $A + \overline{A}B = A + B$

$y = D + C = AB + C$



$$y = f(A,B) = \overline{A \oplus B}$$
$$= A\cdot B + \overline{A\cdot B}$$

A	B	$y = A\cdot B + \overline{A\cdot B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

19.3 Boole-ova algebra

Zakoni i pravila racunanja Booleove algebre prikazana su u donjoj tabeli i to za funkcije dvije i tri promjenjive.

Tabela 2

Zakon	Pravilo	Pravilo	Pravilo
$A+B=B+A$	$A+0=A$	$A\cdot 0=0$	$A+AB=A$
$A\cdot B=B\cdot A$	$A+1=1$	$A\cdot 1=A$	$A(A+B)=A$
$A+(B+C)=(A+B)+C$	$A+A=A$	$A\cdot A=A$	$A\cdot B+A\cdot\overline{B}=A$

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$(A+B)(C+D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$

$A + \overline{A} = 1$ $\quad A \cdot \overline{A} = 0$

$(A+B)(A+\overline{B}) = A$

$A + \overline{A}B = A + B$

$A(\overline{A} + B) = A \cdot B$

Zakon Pravilo Pravilo Pravilo

$A + B \cdot C = (A+B)(A+C)$

$A(B+C) = AB + AC$

$A \cdot B + \overline{A} \cdot C = (A+C) + (\overline{A} + B)$

$(A+B)(\overline{A}+C) = A \cdot C + \overline{A} \cdot B$

$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$

$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C) = (A+B)(\overline{A}+C)$

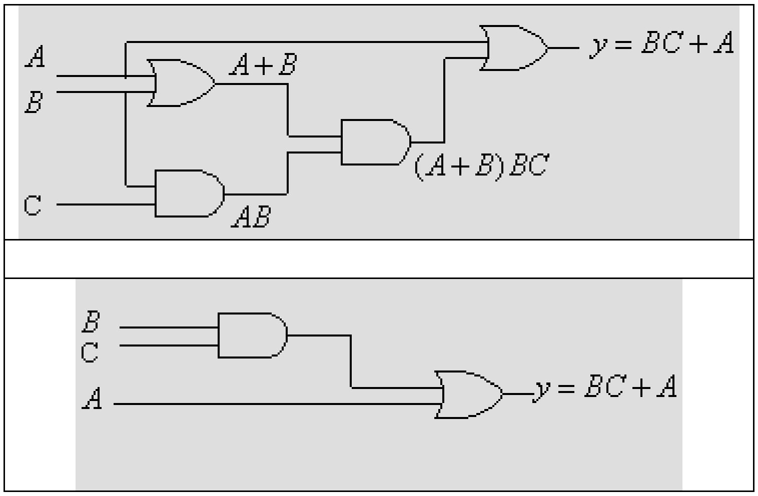
Rjesavanje zadataka iz digitalne algebre, primjenom Boole pravila

1. Pojednostavi zadani izraz koristeci gornje zakone i pravila Booleove algebre:

$y = (A+B)BC + A$ pomnozimo:

$y = ABC + BBC + A = ABC + BC + A = BC(A+1) + A = BC \cdot 1 + A = BC + A$

Umjesto zadanih cetiri sklopa, mozemo istu funkciju dobiti primjenom samo dva sklopa:



2. Pojednostavi izraz: $y = B(A + C) + C$

$y = B(A + C) + C \Rightarrow \quad y = B(A + C) + C \Rightarrow \quad y = BA + BC + C$

$y = BA + C(B + 1)$ zamijenimo $(B + 1) = 1 \quad C \cdot 1 = C$ pa imamo

$y = BA + C = AB + C$

3. Pojednostavi izraz: $y = AB + \overline{B}\,\overline{A}C$

$y = AB + \overline{B}\,\overline{A}C \Rightarrow y = AB + \overline{B}\,\overline{A}C$ zamijenimo: $D = AB, \overline{D} = \overline{A}\,\overline{B}$

$y = D + \overline{D}C \Rightarrow$ primijenimo $A + \overline{A}B = A + B$

$y = D + C = AB + C$

4. Pojednostavi izraz: $y = \left[\left(A + \overline{B}\right)\left(B + C\right)\right]B$

$y = \left[\left(A + \overline{B}\right)\left(B + C\right)\right]B \Rightarrow y = (AB + AC + \overline{B}B + \overline{B}C)B$ primijenimo: $\overline{B}B = 0$

$y = ABB + ACB + \overline{B}BC$ primijenimo: $BB = B$

$y = AB + ABC + 0 \cdot C$ primijenimo: $0 \cdot C = 0$

$y = AB + ABC = AB\left(1 + C\right)$ primijenimo: $1 + C = 1 \Rightarrow y = AB$

5. Pojednostavi izraz: $y = \overline{A}\left(A + B\right) + \overline{C} + CB$

$y = \overline{A}\left(A + B\right) + \overline{C} + CB \Rightarrow \overline{C} + CB \equiv A + \overline{A}B = A + B \Rightarrow y = \overline{A}\left(A + B\right) + \overline{C} + B$

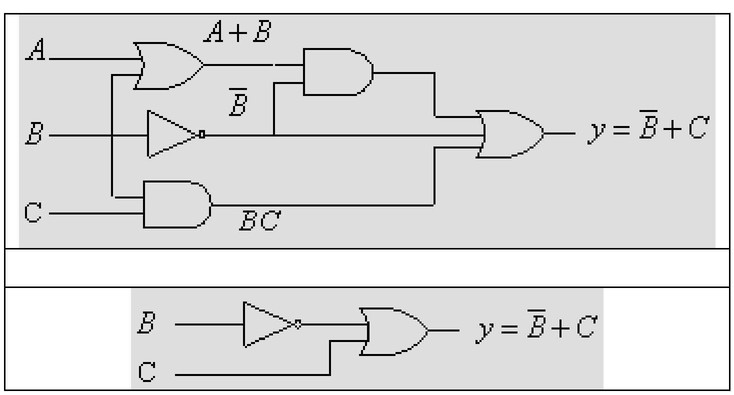
$y = \overline{A}A + \overline{A}B + \overline{C} + B$ primijenimo: $\overline{A}A = 0$

$y = B + \overline{A}B + \overline{C}$ primijenimo: $B + \overline{A}B \equiv A + \overline{A}B = A + B \Rightarrow \qquad y = B + \overline{C}$

6. Pojednostavi izraz: $y = \left(A + B\right)\overline{B} + \overline{B} + BC$

$y = \left(A + B\right)\overline{B} + \overline{B} + BC \Rightarrow y = A\overline{B} + B\overline{B} + \overline{B} + BC$ primijenimo: $B\overline{B} = 0$

$y = A\overline{B} + \overline{B} + BC \Rightarrow y = \overline{B}\left(A + 1\right) + BC$ primijenimo: $A + 1 = 1 \Rightarrow y = \overline{B} + BC$



DeMorgan-ov Teorem

Komplement produkta funkcija jednak je zbroju komplemenata pojedinih funkcija; i obratno
Komplement zbroja funkcija jednak je produktu komplemenata tih funkcija.

$$\overline{A\cdot B\cdot C\cdot\ldots}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ldots \quad \text{odnosno} \quad \overline{A+B+C+\ldots}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\ldots$$

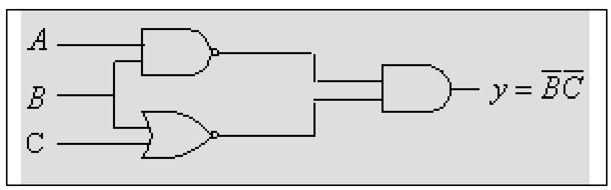
U slijedecem primjeru vidjeti cemo kako se primjenom DeMorgan-ovim teoremom mogu raznim skolpovima dobiti iste izlazne funkcije:

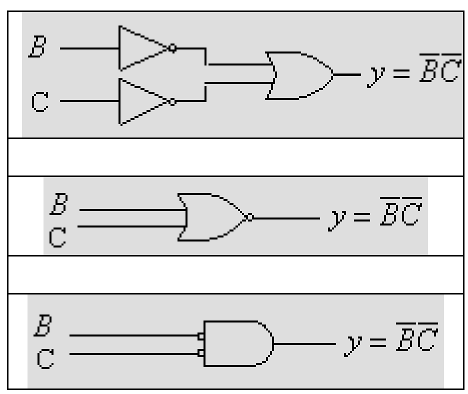
Rijesi: $y=\overline{AB}\cdot\overline{B+C}\Rightarrow y=\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\Rightarrow y=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{B}\overline{B}\overline{C}$ $\quad \overline{B}\overline{B}=\overline{B}$

$y=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+\overline{B}\overline{C}\Rightarrow y=\overline{B}\overline{C}\left(\overline{A}+1\right)$ $\quad \left(\overline{A}+1\right)=1$

$y=\overline{B}\overline{C}$

Na donjim slikama prikazani su ekvivalentni spojevi za zadani sklop-izraz:





7. Rijesi: $y=\overline{\overline{\overline{AB}}\cdot\left(A+B\right)}\Rightarrow \quad y=\overline{\overline{\overline{AB}}}+\overline{\left(A+B\right)}\Rightarrow y=AB+\overline{AB}$

8. Rijesi: $y=\overline{D+D\overline{A}+BC}\Rightarrow y=\overline{D}\cdot\overline{D\overline{A}}\cdot\overline{BC}$

$y=\overline{D}\cdot\left(\overline{D}+\overline{\overline{A}}\right)\left(\overline{B}+\overline{C}\right)=\overline{D}\cdot\left(\overline{D}+A\right)\left(\overline{B}+\overline{C}\right)$ $\quad \overline{D}\cdot\left(\overline{D}+A\right)\equiv A\left(A+B\right)=A$

$y=\overline{D}\cdot\left(\overline{B}+\overline{C}\right)$ To se moglo rijesiti i ovako:

$$y=\overline{D+D\overline{A}+BC} \Rightarrow y=\overline{D+BC}=\overline{D}\cdot\overline{BC} \qquad D+D\overline{A} \equiv A(A+B)=A$$
$$y=\overline{D}\cdot\left(\overline{B}+\overline{C}\right)$$

9. Rijesi: $y=\overline{A\overline{B}}+\overline{A\left(\overline{A}+C\right)} \Rightarrow y=\overline{A}+\overline{\overline{B}}+\overline{A\left(\overline{A}+C\right)}$

$$y=\overline{A}+B+\overline{A}+\overline{\left(\overline{A}+C\right)} \qquad \overline{A}+\overline{A}=\overline{A}$$
$$y=\overline{A}+B+\overline{\overline{A}}\cdot\overline{C} \Rightarrow y=\overline{A}+A\overline{C}+B \qquad A(A+B)=A$$
$$y=\overline{A}+\overline{C}+B$$

10. Rijesi: $y=\overline{AB}\cdot(B+C) \Rightarrow y=\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\cdot(B+C) \Rightarrow y=\overline{A}B+\overline{A}C+B\overline{B}+\overline{B}C$

$$y=\overline{A}B+\overline{A}C+\overline{B}C \qquad B\overline{B}=0$$

11. Rijesi $y=DA+A\overline{B}+BC+A\overline{C}$ $\quad AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$ Dodamo AB

$$y=DA+A\overline{B}+AB+BC+A\overline{C}$$
$$y=DA+A\left(\overline{B}+B\right)+BC+A\overline{C} \qquad \overline{B}+B \equiv \overline{A}+A=1$$
$$y=DA+A+BC+A\overline{C} \qquad DA+A \equiv A+AB=A$$
$$y=A+BC+A\overline{C} \qquad A+A\overline{C} \equiv A+AB=A$$
$$y=A+BC$$

12. Rijesi: $y=\overline{A\overline{B}\cdot(A+C)}+\overline{A}B\cdot\left(\overline{A+\overline{B}+\overline{C}}\right) \Rightarrow y=\overline{A\overline{B}\cdot(A+C)}+\overline{A}B\cdot\left(\overline{A}\cdot\overline{\overline{B}}\cdot\overline{\overline{C}}\right)$ $\quad \overline{\overline{B}}=B$

$$y=\overline{A}+\overline{\overline{B}}+\overline{(A+C)}+\overline{A}B\cdot\left(\overline{A}\cdot\overline{\overline{B}}\cdot\overline{\overline{C}}\right)$$
$$y=\overline{A}+B+\overline{A}\cdot\overline{C}+\overline{A}\,\overline{A}BBC=\overline{A}+\overline{A}\cdot\overline{C}+B+\overline{A}\,\overline{A}BBC \qquad \overline{A}\cdot\overline{A}=\overline{A}$$
$$y=\overline{A}\cdot\left(1+\overline{C}\right)+B+\overline{A}BC \qquad \left(1+\overline{C}\right)=1$$
$$y=\overline{A}+B\left(1+\overline{A}C\right) \qquad \left(1+A\overline{C}\right)=1$$
$$y=\overline{A}+B$$

13. Rijesi: $y=\overline{D\left[A+B\left(C+\overline{D}\right)\right]} \Rightarrow y=\overline{D}+\overline{\left[A+B\left(C+\overline{D}\right)\right]} \Rightarrow$ $\quad y=\overline{D}+\overline{A}\cdot\overline{B\left(C+\overline{D}\right)}$

$$y=\overline{D}+\overline{A}\cdot\left(\overline{B}+\overline{C}\cdot\overline{\overline{D}}\right)=\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}D$$
$$y=\overline{D}+\overline{A}\,\overline{C}D+\overline{A}\,\overline{B} \qquad \overline{D}+\overline{A}\,\overline{C}D \equiv \left(A+\overline{A}B\right)=A+B$$
$$y=\overline{D}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}$$

Standardni oblik logickih funkcija
Ovaj postupak omogucava pojednostavljenja prikaza logickih promjenjiva upotrebom standardnih oblika: Standardni zbroj (suma) produkata i Standardni produkt zbroja (sume)

Standardni zbroj (suma) produkata - je oblik promjenjivih u kojem se doticne promjenjive prikazuju kao zbroj produkata. Svaki produkt sadrzi sve promjenjive ili njihov komplement

Primjer: $y = f(A,B,C) = A + BC$ oprimijenimo znanje od ranije:

$$y = A\cdot\left(B+\overline{B}\right)\left(C+\overline{C}\right)+\left(A+\overline{A}\right)\cdot BC \qquad \left(A+\overline{A}\right)=\left(B+\overline{B}\right)=\left(C+\overline{C}\right)=1$$

$$y = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC + \overline{A}BC \qquad ABC + ABC = A + A = A$$

$$y = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC$$

Gornji izraz je suma produkata.

Svaki proprodukt sadrzi sve promjenjive (neke su komplementne)

Proprodukti imaju naziv minterm.

Suma produkata se u vecini slucajeva postize kombinacijom odgovarajuceg broja AND sklopova i jednim OR sklopom, koji ce te promjenjive zbrojiti.

Standardni produkt suma (zbroja) - je oblik promjenjivih u kojem se doticne promjenjive prikazuju kao produkt suma . Svaka suma sadrzi sve promijenjive ili njihov komplement.

Primjer: $y = f(A,B,C) = A\left(\overline{B}+C\right)$ nastojimo da svaka suma ima sve promjenjive:

$$y=\left(A+B\overline{B}+C\overline{C}\right)\left(A\overline{A}+\overline{B}+C\right) \qquad A\overline{A}=B\overline{B}=C\overline{C}=0,\left(A+\overline{B}+C\right)\left(A+\overline{B}+C\right)=AA=A$$

$$y=(A+B+C)\left(A+\overline{B}+C\right)\left(A+B+\overline{C}\right)\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)\left(A+\overline{B}+C\right)\left(\overline{A}+\overline{B}+C\right)$$

$$y=(A+B+C)\left(A+\overline{B}+C\right)\left(A+B+\overline{C}\right)\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)\left(\overline{A}+\overline{B}+C\right)$$

Gornji izraz je produkt suma.

Svaki proprodukt sadrzi zbroj svih promjenjive (neke su komplementne)

Proprodukti imaju naziv maxterm.

Produkt suma se u vecini slucajeva postize kombinacijom odgovarajuceg broja OR sklopova i jednim AND sklopom, koji ce te promjenjive pomnoziti.

14. $y=\overline{\left(\overline{A}C+B\overline{C}\right)\left(A+\overline{B}+C\right)} \Rightarrow y=\overline{\left(\overline{A}C+B\overline{C}\right)}+\overline{\left(A+\overline{B}+D\right)}$

$$y=\overline{\overline{A}C}\cdot\overline{B\overline{C}}+\overline{\left(A+\overline{B}+D\right)} \Rightarrow y=\left(\overline{A}+C\right)\left(B+\overline{C}\right)+\overline{A\overline{B}D}$$

$$y=\left(\overline{A}+C\right)\left(B+\overline{C}\right)+\overline{A}B\overline{D} \Rightarrow y=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{C}+BC+C\overline{C}+\overline{A}B\overline{D} \qquad C\overline{C}=0$$

$$y=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{C}+BC+\overline{A}B\overline{D}$$

15. $y = A + \bar{A}B + \overline{(A+B)} \cdot C + \overline{(A+B+C)} \cdot D \Rightarrow y = A + B + \overline{(A+B)} \cdot C + \overline{(A+B+C)} \cdot D$

$y = A + B + C + \overline{(A+B+C)} \cdot D \Rightarrow y = A + B + C + D$ koristili smo: $A + \bar{A}B = A + B$

16. $y = \bar{A} + \bar{A}B + BC\bar{D} + B\bar{D} \Rightarrow y = A \cdot (1+B) + B\bar{D} \cdot (C+1)$ $(A+1) = A$

$y = A + B\bar{D}$

17. $y = \overline{AB\bar{C} + D} + \overline{A\bar{B} + B\bar{C}} \Rightarrow y = (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot \bar{D} + (\bar{A} + B) \cdot (\bar{B} + C)$

$y = \bar{A}\bar{D} + \bar{B}\bar{D} + C\bar{D} + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C + B\bar{B} + BC \Rightarrow y = \bar{A}\bar{D} + \bar{B}\bar{D} + C\bar{D} + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C + BC$

18. Razvij u standardni oblik produkt suma: $y = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$

$y = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \Rightarrow y = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{C} + \bar{D}$ $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

$y = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$ $\bar{B} + \bar{B} = \bar{B}$

19. Razvij u standardni oblik sumu produkata: $y = (A\bar{B} + \bar{A}B)(C + \bar{C}D)$

$y = (A\bar{B} + \bar{A}B)(C + \bar{C}D) \Rightarrow$ nadopunimo sa sve cetiri promjenjive:

$y = A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C}D$

$y = A\bar{B}C(D + \bar{D}) + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC(D + \bar{D}) + \bar{A}B\bar{C}D$ $D + \bar{D} = 1$

$y = A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D$

20. Razvij u standardni oblik sumu produkata: $y = (\bar{A} + \bar{B})(\bar{A}\bar{B} + C)$

$y = (\bar{A} + \bar{B})(\bar{A}\bar{B} + C) \Rightarrow y = \bar{A}\bar{A}\bar{B} + \bar{A}C + \bar{A}\bar{B}\bar{B} + \bar{B}C$ $\bar{A}\bar{A} = \bar{A}$

$y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C + \bar{A}\bar{B} + \bar{B}C \Rightarrow y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C + \bar{B}C$ zamijenili smo : $\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B}$

$y = \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) + \bar{A}C(B + \bar{B}) + \bar{B}C(A + \bar{A})$

$y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C \Rightarrow y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C$

21. Razvij u standardni oblik sumu produkata: $y = \overline{(\bar{A} + \bar{B})(A + \bar{A}B)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{A}BC)}$

$y = \overline{(\bar{A} + \bar{B})(A + \bar{A}B)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{A}BC)}$ Pomnozimo $(\bar{A} + \bar{B})(A + \bar{A}B) = \bar{A}B + A\bar{B}$

$y = \overline{(\bar{A}B + A\bar{B})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{A}BC)}$ $(\bar{A}B + A\bar{B})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{A}BC) = \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}BC$

$y = \overline{\bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}B}$ Primijenimo DeMorgan-ov teorem

$y = (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C})$ Pomnozimo

$y = \left(A\overline{A} + \overline{A}\overline{B} + AB + B\overline{B}\right) \cdot \left(A + \overline{B} + \overline{C}\right)$ $\quad A\overline{A} = B\overline{B} = 0$

$y = \left(AB + \overline{A}\overline{B}\right) \cdot \left(A + \overline{B} + \overline{C}\right)$ $\quad$ Pomnozimo

$y = AAB + A\overline{A}\overline{B} + AB\overline{B} + \overline{A}\overline{B}\overline{B} + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

$y = AB + \overline{A}\overline{B} + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ $\quad$ Nadopunimo

$y = AB\left(C + \overline{C}\right) + \overline{A}\overline{B}\left(C + \overline{C}\right) + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

$y = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} \Rightarrow y = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

19.4 Karnaugh Mape

Karnaugh mape (K-map) su efikasna metoda za pronalazenje pojednostavljivanje algebarskih izraza. Slicno tablici istine, K-mape sadrze polja u koju se upisuje stanje promjenjive (1ili 0, ovisno koji se nacin koristi). Ukupno ima 0 polja, gdje je n-broj promjenjivih

Na donjoj slici prikazana je prosirena tablica istine i K-mapa za funkciju od cetiri promjenjive. Tablica istine sadrzi sve promjenjive A,B,C i D, njihovo zadano stanje a u poljima oznacenim crveno, upisane su vrijednosti 1, za minterms (clanovi sume produkata) ili ako se koriste clanivi produkta suma (maxterm) upisuje se 0. K-mapa ima oznacenacrveno, polja koja odgovaraju stanju 1 (minterms, objasnjenje je u nastavku)
Pojednostavljenja ili bolje receno, rjesenja se dobiju, zaokruzivanjem najblizih polja u jednu cjelinu. Pravila su jednostavna i mogu se opisati ovako:

- Zadanu jednadzbu reduciramo Booleovom algebrom u standardni oblik sume porodukata (produkt suma)
- Ispunimo polja sa 1 za minterm odnosno sa 0 za maxterm.
- Zaokruzimo najblizea polja sa 1 (0) u jednu cjelinu. Polja koja su na granici spajaju se zamisljajuci mapu kao jednu neprekinutu povrsinu (valjak).
- Ispisi zbroj minterms koji se dobije na taj nacin. To je rjesenje.

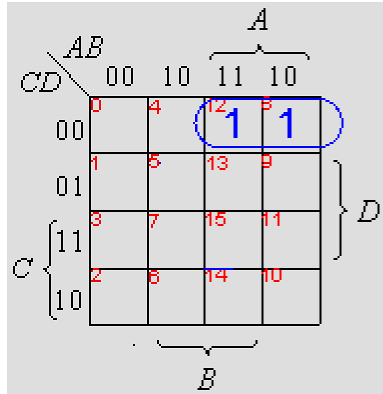
U nastavku je primjer koji sve objasnjava:

1. Pojednostavi zadanu funkciju: $y = f(A,B,C,D) = A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}\overline{D}$

$y = f(A,B,C,D) = A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}\overline{D} \Rightarrow y = A\overline{C}\overline{D}\left(\overline{B} + B\right)$ $\quad \left(\overline{B} + B\right) = 1$

$y = A\overline{C}\overline{D}$ zaokruzena polja su rjesenje (vidi sliku). Zaokruzena polja obuhvacaju samo A i $\overline{C}\overline{D}$.
Polja nisu u kolonama za B (obje) niti C niti D promjenjive.

A	*B*	*C*	*D*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	**0**	**0**	**0**									**1**							
1	**1**	**0**	**0**													**1**			



Pogledajmo pazljivije zadanu funkciju. Minterm, $A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} = 1000 = m_8$ minterm za broj 8 (8 binarno $= 1000$), odnosno $AB\overline{C}\,\overline{D} = 1100 = m_{12}$ minterm za broj 12 (12 binarno $= 1100$).
Funkcija se mogla napisati i u obliku: $y = f(A,B,C,D) = m_8 + m_{12} = A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D}$

2. Pojednostavi funkciju: $y = f(A,B,C,D) = \sum m(0,2,3,4,5,7,8,9,13,15)$

$$y = f(A,B,C,D) = \sum m(0,2,3,4,5,7,8,9,13,15)$$

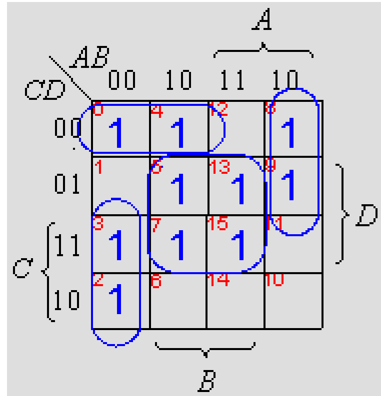
$$y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + AB\overline{C}D + ABCD$$

A	*B*	*C*	*D*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	**0**	**0**	**0**	**1**															
0	**0**	**0**	**1**			**1**													
0	**0**	**1**	**1**				**1**												
0	**1**	**0**	**0**					**1**											
0	**1**	**0**	**1**						**1**										
0	**1**	**1**	**1**								**1**								
1	**0**	**0**	**0**									**1**							
1	**0**	**0**	**1**										**1**						
1	**1**	**0**	**1**														**1**		
1	**1**	**1**	**1**																**1**

Rjesenje ovog zadatka je: $y = f\left(A,B,C,D\right) = A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + BD$

$A\overline{C}\,\overline{D} \equiv$ polja 0,4 oznacena crveno; $\overline{A}\,\overline{B}C \equiv$ polja 2,3 oznacena crveno

$A\overline{B}\,\overline{C} \equiv$ polja 8,9 oznacena crveno; $BD \equiv$ polja 5,13,7,15 oznacena crveno



5. Pojednostavi funkciju: $y = f\left(A,B,C,D\right) = B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D + \overline{A}BCD + ABCD$

$$y = f\left(A,B,C,D\right) = B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D + \overline{A}BCD + ABCD$$

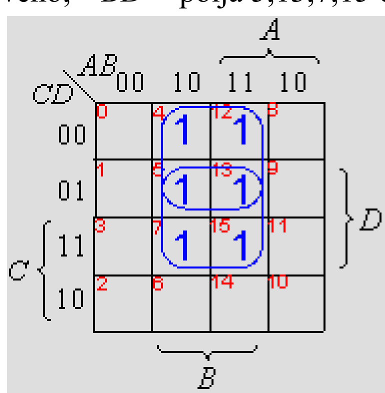
$$y = \left(A+\overline{A}\right)B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D + \overline{A}BCD + ABCD \quad \text{Prosirimo izraz sa } \left(A+\overline{A}\right)$$

$$y = AB\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D + \overline{A}BCD + ABCD$$

A	B	C	D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	**1**	**0**	**0**					**1**											
0	**1**	**0**	**1**						**1**										
0	**1**	**1**	**1**								**1**								
0	**1**	**0**	**1**													**1**			
0	**1**	**1**	**0**														**1**		
1	**0**	**0**	**1**																**1**

Rjesenje je slijedece: $y = f(A,B,C,D) = B\overline{C} + BD$

$B\overline{C} \equiv$ polja 4,12,5,13 oznacena crveno; $BD \equiv$ polja 5,13,7,15 oznacena crveno



6. Pojednostavi zadanu funkciju: $y = f\left(A,B,C,D\right) = \overline{B}\left(CD + \overline{C}\right) + C\overline{D}\left(\overline{A+B} + AB\right)$

$$y = f\left(A,B,C,D\right) = \overline{B}\left(CD + \overline{C}\right) + C\overline{D}\left(\overline{A+B} + AB\right)$$

$$y = \overline{B}CD + \overline{B}\,\overline{C} + C\overline{D}\left(\overline{A}\,\overline{B} + AB\right) = \overline{B}CD + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}CD + ABCD$$

$$y = \left(A + \overline{A}\right)\overline{B}CD + \left(A + \overline{A}\right)\left(D + \overline{D}\right)\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}CD + ABCD$$

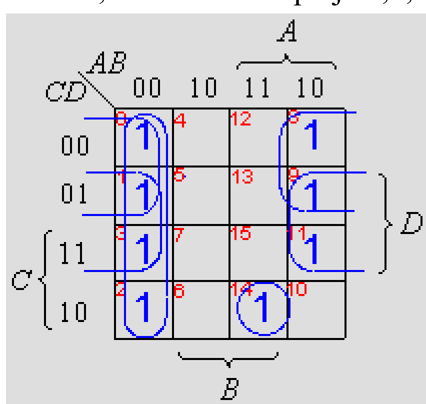
$$y = A\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}CD + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + ABCD$$

A	B	C	D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	**0**	**0**	**0**	**1**															
0	**0**	**0**	**1**		**1**														
0	**0**	**1**	**0**			**1**													
0	**0**	**1**	**1**				**1**												
1	**0**	**0**	**0**									**1**							
1	**0**	**0**	**1**										**1**						
1	**0**	**1**	**1**												**1**				
1	**1**	**1**	**0**															**1**	

Rjesenje je slijedece: $y = f(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B} + ABC\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{D}$

$\overline{A}\,\overline{B}$ $\equiv$ polja 0,1,2,3 oznacena crveno; $ABC\overline{D} \equiv$ polje 14 oznacena crveno

$\overline{B}\,\overline{C}$ $\equiv$ polja 0,1,8,9 oznacena crveno; $\overline{B}\,\overline{D}$ $\equiv$ polja 1,3,9,11 oznacena crveno



Slijedeci primjer obradjuje rjesavanje K-mapa koristeci standardni produkt suma.
Pravilo za zaokruzivanje promjenjivih je jednak kao i u prijasnjoj metodi. Promjenjive koje se zaokruze, prikazuju se kao suma (za razliku od prijasnje metode, kada smo promjenjive prikazivali u obliku produkta).

7. Promatrajmo funkciju zadanu produktom suma (maksterm):

$$y = f(A,B,C,D) = \prod M(0,5,7,8,9,10,11,13)$$

$$y = \left(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}\right)\left(\overline{A}+B+\overline{C}+D\right)\left(\overline{A}+B+C+D\right)\left(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}\right)\left(A+\overline{B}+\overline{C}+D\right)$$

$$y = \left(A+\overline{B}+C+\overline{D}\right)\left(A+\overline{B}+C+D\right)\left(A+B+\overline{C}+D\right)$$

A	*B*	*C*	*D*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	**0**	**0**	**0**	**0**															
0	**1**	**0**	**1**						**0**										
0	**1**	**1**	**1**								**0**								
1	**0**	**0**	**0**									**0**							
1	**0**	**0**	**1**										**0**						
1	**0**	**1**	**0**											**0**					
1	**0**	**1**	**1**												**0**				
1	**1**	**0**	**1**														**0**		

Rjesenje je slijedece:

$$y = f(A,B,C,D) = \left(\overline{A}+B\right)\left(A+\overline{B}+\overline{D}\right)\left(\overline{A}+C+\overline{D}\right)\left(B+C+D\right)$$

$\left(\overline{A}+B\right)$ $\equiv$ polja 0,8 oznacena crveno; $\left(A+\overline{B}+\overline{D}\right)$ $\equiv$ polja 6,7 oznacena crveno

$\left(\overline{A}+C+\overline{D}\right)$ $\equiv$ polja 13,9 oznacena crveno; $\left(B+C+D\right)$ $\equiv$ polja 8,9,11,10 oznacena crveno