Booleova algebra

Logička ili Booleova algebra je sustav teorema koji rabe simboličku logiku da bi opisali skupove elemenata i odnose medu njima. Razvojem digitalnih računala otkriveno je da je Booleova algebra vrlo dobro primjenjiva u konstruiranju i analizi rada računala jer takva računala također mogu imati samo dva stanja (uključen-isključen, ima napona-nema napona).

Osnovni element logičke algebre jest ***sud***.

Sud je izjavna rečenica koja može biti ili istinita ili lažna, ali ne oboje u isto vrijeme.

Temeljno je svojstvo suda istinitost ili lažnost. Istinit sud označavamo simbolima T ili 1, a lažne simbolima ⊥ ili 0. Radi jednostavnosti, izjave obično označavamo jednim slovom. Sudove (***operande***) možemo kombinirati u logičke izraze, koje povezujemo vezama (***operatorima***).

Logičke operacije

Osnovne logičke operacije su jednostavne i sastoje se od jednoga ili dva operanda i jednog operatora.

To su :

Logička operacija NE (eng. NOT) - negacija

Logička operacija I (eng. AND)

Logička operacija ILI (eng. OR)

Logičko NE

Logička operacija NE zove se još i negacija, a uključuje jedan operand i jedan operator. Operator NE označava se jednim od simbola: **~** ili **–** ili **´**

Primjer:

ako je postojeća izjava: **p** = "Danas je subota",

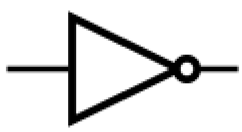
onda je njezina negacija: = "Danas nije subota".

Mijenja vrijednost izjave: iz istine u laž, iz laži u istinu. Negacija izjave nova je izjava.

Tablica istine ili tablica stanja logičke operacije NE:

p	$\overline{\mathbf{p}}$
1	0
0	1

Shematski prikaz logičkog sklopa:



Tablica stanja definicija je logičke operacije i mora sadržavati sva moguća stanja operanada i logičke operacije.

Logičko I (engl. AND) , konjunkcija ili logičko množenje

Binarna operacija s 2 operanda i 1 operatorom. Ima zadatak vratiti istinu samo ako su obadvije uključene izjave istina. Simboli su: ∧ ili ∩ ili •

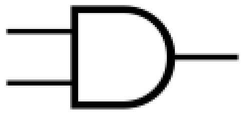
Primjer:

10 ≤ 0 i 5 >3 LAŽNA izjava

10 > 0 i 5 >3 ISTINITA izjava

A	B	A • B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	**1**	**1**

Logički sklop prikazujemo:



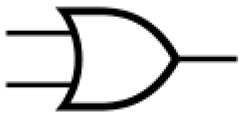
Logičko ILI (engl. OR) , disjunkcija ili logičko dijeljenje

Binarna operacija s 2 operanda i 1 operatorom. Ima zadatak vratiti istinu ako je makar jedna uključena izjave istina. Simboli su: ∨ ili ∪ ili **+**

A	B	A + B
0	**0**	**0**
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Izjava je lažna samo ako su obadvije uključene izjave laž.

Logički sklop prikazujemo:



Složene logičke operacije

Nastaju kombiniranjem više operanda i operatora. Rezultat je jedno od 2 moguća stanja : istina ili laž (1 ili 0). Najviši prioritet ima negacija (NE), zatim logički I, te na kraju logičko ILI.

Za promjenu prioriteta koristimo zagradu.

Teoremi Booleove algebre:

Vrlo često uporabom pravila i teorema Booleove algebre možemo znatno smanjiti broj članova, odnosno minimizirati formulu.

Neka od važnijih pravila ekvivalencije su:

Komutativnost	A + B = B + A	A · B = B · A
Asocijativnost	(A + B) + C = A + (B + C)	(A · B) ·C = A · (B · C)
Distributivnost	A · (B + C) = (A · B) + (A · C)	A · (B + C) = (A · B) + (A · C)
Neutralni element	A + 0 = A	A · 1 = A
	A + A = A	A · A = A
Komplementarnost	A + $\bar{A}$ = 1	A · $\bar{A}$ = 0
De Morganovi zakoni	$\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$	$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$
Involutivnost	$\bar{\bar{A}} = A$	
Anihilacija	A + 1 = 1	A · 0 = 0
Apsorpcija	A · (A + B) = A	A + A · B = A

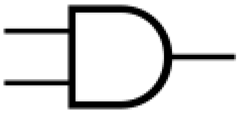
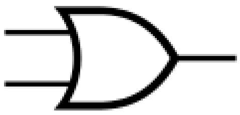
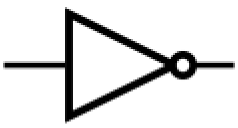
Logički sklopovi

Koliko god računalo izgledalo složeno, njegov se rad može prikazati kombinacijom dvaju stanja binarnog brojevnog sustava. Broj tipova elemenata od kojih se gradi računalo relativno je malen, ali broj istovrsnih elemenata je vrlo velik.

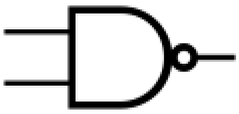
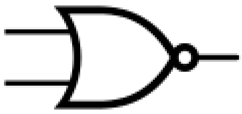
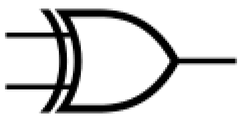
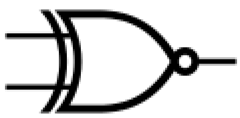
Osnovni elementi pomoću kojih se gradi računalo napravljeni su prema zakonima elektrotehnike i tehnologije, a mogu se promatrati s elektrotehničkog ili logičkog stajališta.

Nas zanima **što rade** (logičko stajalište), a **ne kako** rade (elektrotehničko).

Osnovni logički sklopovi

<table>
<tr><th>Operacija</th><th>Simbol</th><th>Booleov izraz</th><th>Tablica istine</th></tr>
<tr><td>I (AND)</td><td></td><td>A · B</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2">ULAZ</td><td>IZLAZ</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>A AND B</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>ILI (OR)</td><td></td><td>A + B</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2">ULAZ</td><td>IZLAZ</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>A AND B</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>NE (NOT)</td><td></td><td>$\bar{A}$</td><td>
<table>
<tr><td>ULAZ</td><td>IZLAZ</td></tr>
<tr><td>A</td><td>NOT A</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Izvedeni logički sklopovi

<table>
<tr><th>Operacija</th><th>Simbol</th><th>Booleov izraz</th><th>Tablica istine</th></tr>
<tr><td>NI (NAND)</td><td></td><td>$\overline{A \cdot B}$</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2">ULAZ</td><td>IZLAZ</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>A NAND B</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>NILI (NOR)</td><td></td><td>$\overline{A + B}$</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2">ULAZ</td><td>IZLAZ</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>A NOR B</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>XILI (XOR)</td><td></td><td>$A \oplus B$</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2">ULAZ</td><td>IZLAZ</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>A XOR B</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>XNILI (XNOR)</td><td></td><td>$\overline{A \oplus B}$</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2">ULAZ</td><td>IZLAZ</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>A XNOR B</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

NI sklop

A	B	A•B	Y
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$Y = \overline{A \bullet B}$

- Negacija I sklopa

NILI sklop

A	B	A+B	Y
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

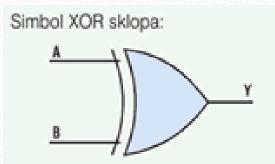
$Y = \overline{A + B}$

- negacija ILI sklopa

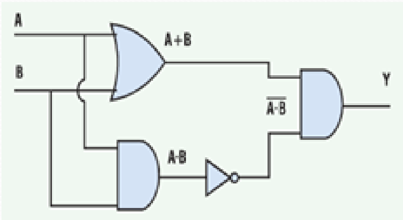
Isključivo ILI (XILI, XOR) sklop

Daje na izlazu 1 samo ako je jedan od ulaza u stanju 1: A XOR B = (A OR B) AND NOT (A AND B)

$$Y = (A + B) \cdot \overline{(A \cdot B)} = A \oplus B$$



A	B	A+B	A· B	$\overline{A \cdot B}$	$(A+B) \cdot \overline{(A \cdot B)}$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0



PRIMJERI ZADATAKA:

1. Zadatak s državne mature (ljetni rok 2010):

Pojednostaviti (minimizirati) izraz:	$A\cdot C\cdot(\overline{A}+B)+B\cdot\overline{C}\cdot(A+\overline{B})$
Na dani izraz možemo primijeniti pravilo distributivnosti, tj. pomnožiti ćemo članove izvan zagrade s članovima unutar zagrade, i to i za lijevi i desni dio izraza:	$A\cdot C\cdot\overline{A}+A\cdot C\cdot B+B\cdot\overline{C}\cdot A+B\cdot C\cdot\overline{B}$
Na krajnjem lijevom i krajnjem desnom dijelu izraza članovima negirano A i negirano B zamijeniti ćemo mjesta radi jasnoće postupka (komutativnost):	$A\cdot\overline{A}\cdot C+A\cdot C\cdot B+B\cdot\overline{C}\cdot A+B\cdot\overline{B}\cdot C$
Sada je vidljivo da na ta dva dijela možemo primijeniti pravilo komplementarnosti (A pomnoženo s negirano A i B s negirano B daje 0):	$0\cdot C+A\cdot C\cdot B+B\cdot\overline{C}\cdot A+0\cdot C$
Za krajnji lijevi i krajnji desni dio izraza sada vrijedi anihilacija (množimo li nešto s nulom dobiti ćemo nulu):	$0+A\cdot C\cdot B+B\cdot\overline{C}\cdot A+0$
I te nule sada možemo „ispustiti“ iz izraza i ostaje nam:	$A\cdot C\cdot B+B\cdot\overline{C}\cdot A$
Sada možemo uočiti da su A i B zajednički članovi i lijevog i desnog dijela izraza pa ih možemo „izvući“ van (distributivnost):	$A\cdot B\cdot(C+\overline{C})$
Za C i negirano C unutar zagrade vrijedi komplementarnost:	$A\cdot B\cdot 1$
Kako množenje s 1 ne mijenja vrijednost izraza, taj 1 možemo izostaviti i ostaje nam rješenje:	$A\cdot B$

2. Koji će oblik nakon pojednostavljenja imati logička formula (s probne državne mature 2009.):

$$\overline{\overline{A\cdot(\overline{B}+C)}+B\cdot(A\cdot C+B)}$$

a. $A\cdot C+\overline{B}$

b. $A+B+\overline{C}$

c. $A+\overline{B}$

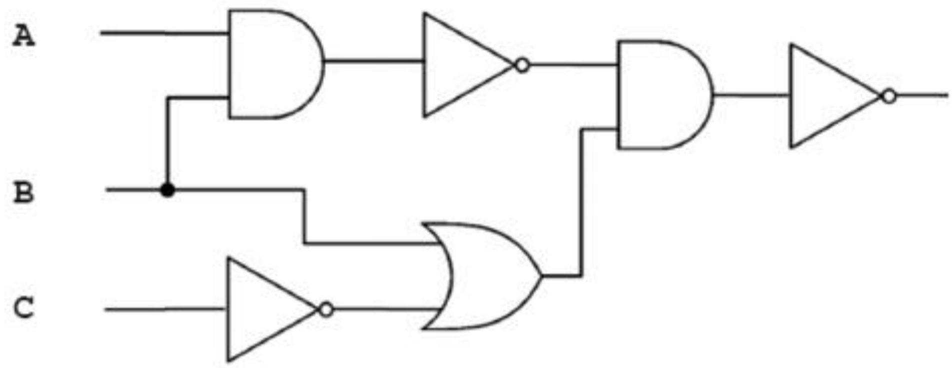
d. $A\cdot\overline{B}$

Rješenje:

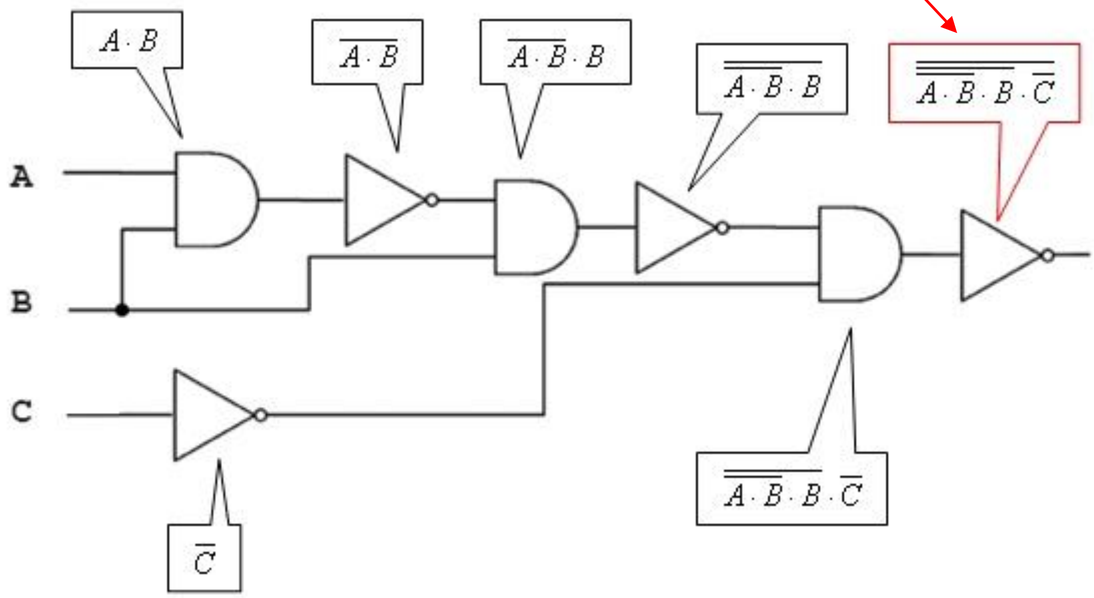
$$\overline{\overline{A\cdot(\overline{B}+C)}+B\cdot(A\cdot C+B)}=\overline{\overline{A}+\overline{\overline{B}+C}+A\cdot B\cdot C+B}=\overline{\overline{A}+\overline{\overline{B}}\cdot\overline{C}+B\cdot(A\cdot C+1)}$$

$$=\overline{\overline{A}+B\cdot\overline{C}+B}=\overline{\overline{A}+B\cdot(\overline{C}+1)}=\overline{\overline{A}+B}=\overline{\overline{A}}\cdot\overline{B}=A\cdot\overline{B}$$

3. Napisati logički izraz za sklop (DM ljeto 2010):



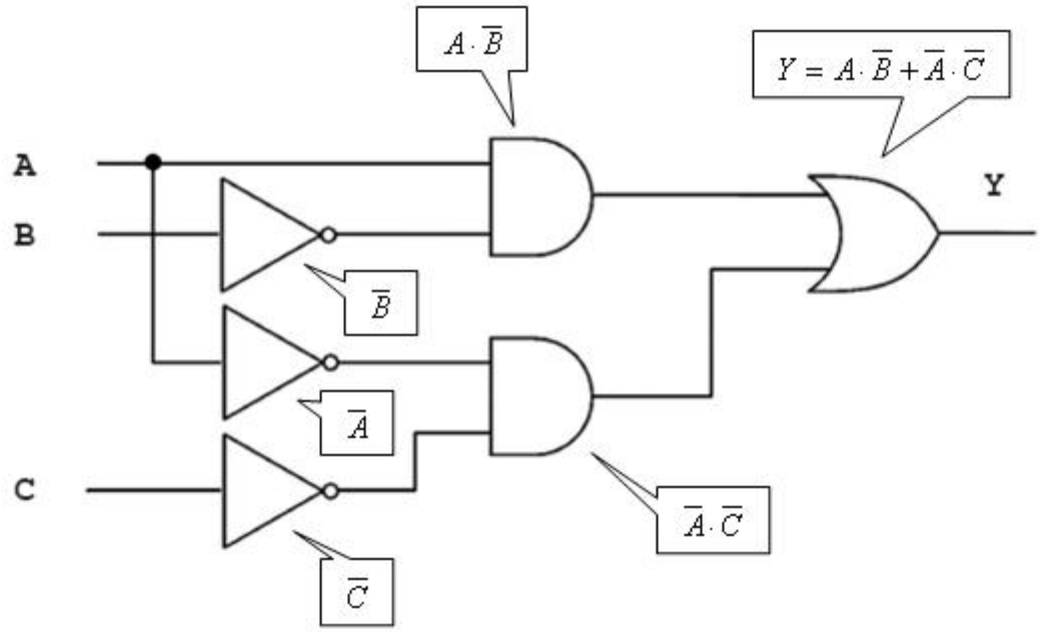
Rješenje:



4. Pojednostavljenje prethodnog zadatka:

Prvo ćemo primijeniti De Morganovo pravilo "razdvojiti" izraz na lijevi dio (tri člana) i desni dio gdje je samo negirano C. Sada nad lijeva tri člana, kao i na desnom C, imamo dvostruku negaciju.	$\overline{\overline{\overline{A\cdot B}\cdot B}\cdot\overline{C}}$ $\overline{\overline{\overline{A\cdot B}\cdot B}}+\overline{\overline{C}}$
To ćemo primjenom pravila involutivnosti jednostavno izostaviti.	$\overline{A\cdot B}\cdot B+C$
Sada na lijevi dio izraza A i B pod negacijom opet možemo primijeniti De Morganovo pravilo.	$(\overline{A}+\overline{B})\cdot B+C$
Članove u zagradi pomnožiti ćemo s B izvan zagrade (distributivnost).	$\overline{A}\cdot B+\overline{B}\cdot B+C$
Negirano B pomnoženo s B daje 0 (anihilacija).	$\overline{A}\cdot B+0+C$
Kada iz izraza maknemo 0 ostaje nam naše krajnje rješenje:	$\overline{A}\cdot B+C$

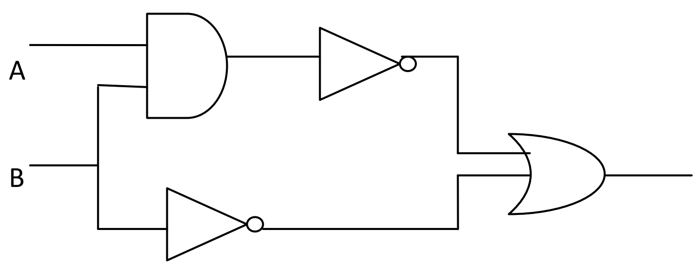
5. Traži se tablica istinitosti za dani sklop i to samo konačno rješenje Y.



Rješenje:

A	B	C	$\overline{B}$	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{C}$	$\overline{A} \cdot \overline{C}$	Y
0	0	0	1	0	1	1	1	**1**
0	0	1	1	0	1	0	0	**0**
0	1	0	0	0	1	1	1	**1**
0	1	1	0	0	1	0	0	**0**
1	0	0	1	1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	1	0	0	0	**1**
1	1	0	0	0	0	1	0	**0**
1	1	1	0	0	0	0	0	**0**

6. Kako glasi jednadžba sklopa sa slike ?



A. $\overline{A \cdot B} + \overline{B}$

B. $\overline{A + B} \cdot \overline{B}$

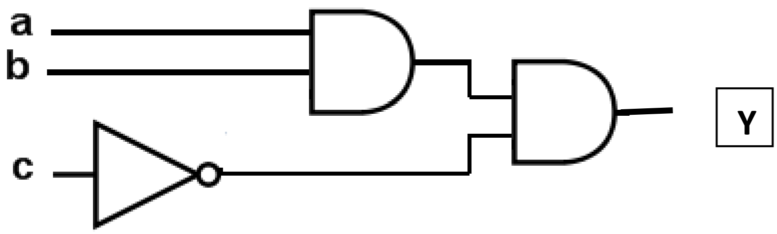
C. $A + \overline{B} \cdot \overline{B}$

D. $A + \overline{B} + \overline{B}$

Rješenje: A

7. Nacrtaj logički sklop za izraz: $Y = A \cdot B \cdot \bar{C}$

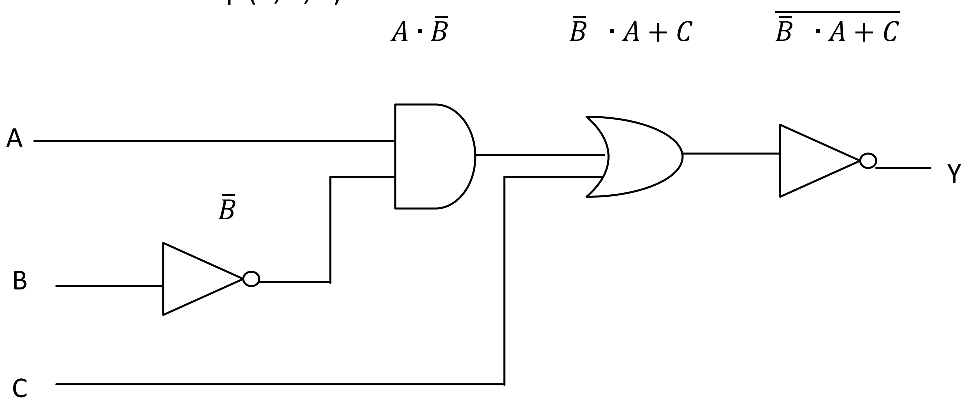
Rješenje:



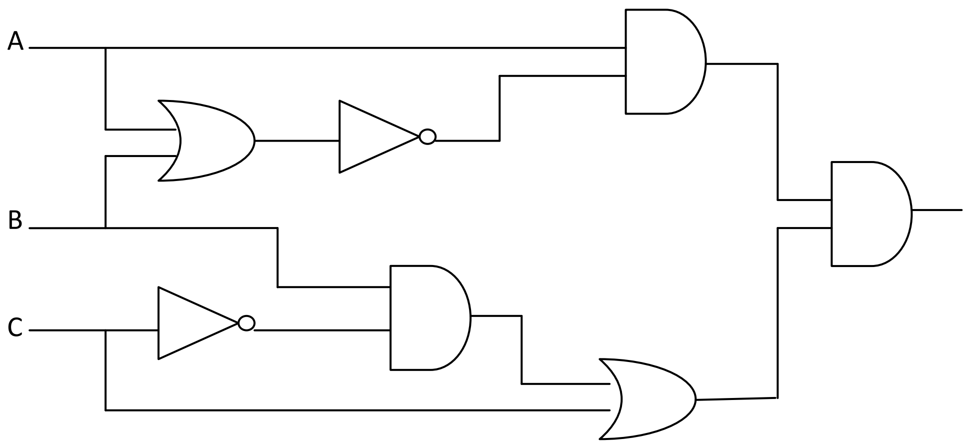
8. Nacrtaj logički sklop za izraz:

$$Y = \overline{(A \cdot \bar{B}) + C}$$

a) Ispod negacije je izraz u kojem je operacija najvišeg stupnja negacija, zatim konjunkcija, a zatim disjunkcija.
b) Nacrtamo ulaze u sklop (A, B, C)



9. Koja je pojednostavljena jednadžba sklopa na slici?



Pojednostavljenje:

$$\left(A\cdot\overline{A+B}\right)\cdot\left(B\cdot\overline{C}+C\right)=A\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\underbrace{\left(B\cdot\overline{C}+C\right)}_{*}=0\cdot\overline{B}\cdot\left(B+C\right)=0\cdot\left(B+C\right)=0$$

* prema pravilu: $A+\overline{A}\cdot B=A+B$, vrijedi: $B\cdot\overline{C}+C=C+B\cdot\overline{C}=C+\overline{C}\cdot B=C+B$